XVII Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

Решение задачи 1

Прежде всего, определим, какие полосы находились на чётных, а какие на нечётных местах перед перестановкой полос. Необходимым условием расположения полосы на нечётном месте является отсутствие в её первой колонке цифр, превосходящих 3. На рисунке соответствующие цифры выделим цветом. Всего получилось шесть полос, которые могли располагаться только на чётных местах до перестановки. Это полосы с номерами 1, 2, 4, 9, 11 и 12. Из того, что число полос равно 12, заключаем, что все остальные полосы располагались на нечётных местах.

316	001	190	014	013	150	171	240	120	131	105	614
010	810	050	610	012	161	121	200	614	120	401	117
619	501	172	327	171	041	061	221	010	033	801	016
115	313	192	312	030	130	160	103	210	013	620	016
512		060		061	250		061	825	16	103	310

Теперь обратим внимание на то, что полосы имеют разные длины. Это произошло из-за того, что последняя строка исходной таблицы была заполнена не целиком. Поэтому можно сделать вывод о том, что до перестановки на последних четырёх местах располагались полосы с номерами 10,2,7,4, либо 10,4,7,2. Первый вариант не подходит, т.к. в третьей строке возникает несуществующий номер буквы в алфавите – 35. Во втором варианте преобразуем пары цифр в буквы. Получим вот что:

```
ЛИМПИА
КЕИКРИ
ВЯЩЕНА
АЯКОВЛ
О
```

Далее, подбирая фрагменты слов по принципу «читаемости», последовательно двигаясь от последних столбцов к первым, восстанавливаем расположение остальных полос и исходный текст.

Ответ: Семнадцатая олимпиада по математике и криптографии посвящена столетию Ивана Яковлевича Верченко.

Решение задачи 2

Заметим, что $abab\ldots ab = ab \cdot x$, где $x = 0101\ldots01$. Число в левой части равенства образовано n-кратным повторением пары цифр ab, поэтому в записи числа x пара 01 встречается также ровно n раз. Поскольку левая часть должна делиться на 21 при любых a и b, число n должно быть таким, чтобы на 21 делилось число x. Число делится на 21 в том и только том случае, когда оно делится на 3 и на 7. Для делимости на 3 необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр числа делилась на 3, поэтому $n = 3k$. Оказывается, что в нашем случае этого достаточно, чтобы число делилось и на 7. В самом деле, представим x в виде следующей суммы чисел:

$$0101\text{K}\ 01 = 010101 + 010101 \cdot 10^6 + 010101 \cdot 10^{12} + \text{K} + 010101 \cdot 10^{6(k-1)}.$$

Тогда каждое слагаемое в правой части равенства делится на 7, так как $010101 = 7 \cdot 1443$.
Ответ: $n = 3k$, где k – произвольное натуральное число.

Решение задачи 3

Используемые для зашифрования цифры (шестёрки) отвечают некоторой дате, и это накладывает на них определенные ограничения. Например, первой цифрой даты может быть только 0,1,2 или 3, третьей – только 0 или 1. Под каждой буквой шифрованного текста запишем возможные варианты букв сообщения:

Т	П	И	Ё	Р	Ж	Е	М	А	А	С	Ф	С	Г	Ь	О	Г	Х	Ж	П	Н
Т	П	И	Ё	Р	Ж	Е	М	А	А	С	Ф	С	Г	Ь	О	Г	Х	Ж	П	Н
С	О	З	Е	П	Ё	Д	Л	Я	Я	Р	У	Н	В	Ы	Н	В	Ф	Ё	О	М
Р	Н		Д	О	Е	Г	К		Ю	П	Т	П	Б		М	Б	У	Е	Н	
П	М		Г	Н	Д	В	Й		Э	О	С	О	~~А~~		Л	А	Т	Д	М	
	Л		В	М	Г		И		Ь	Н	Р		~~Я~~		К	Я	С		Л	
	К		Б	Л	В		З		Ы	М	П		~~Ю~~		Й	Ю	Р		К	
	Й		А	К	Б		Ж		Ъ	Л	О		~~Э~~		И	Э	П		Й	
	И		Я	Й	А		Ё		Щ	К	Н		~~Ь~~		З	Ь	О		И	
	З		Ю	Ч	Я		Е		Ш	Й	М		~~Ы~~		Ж	Ы	Н		З	
	Ж		Э	З	Ю		Д		Ч	И	Л		~~Ъ~~		Ё	Ъ	М		И	

Искомое сообщение получается выбором в каждом столбце по одной букве, так, чтобы выбранные буквы образовали “читаемую” строку. Например, в 15-м столбце присутствуют только буквы Ь и Ы, что позволяет отсеять семь нижних вариантов букв в предыдущем столбце. Поскольку комбинация из шести цифр периодически повторялась, те же самые варианты можно отсеять во 2-м, 8-м и 20-м столбцах.

Т	П	И	Ё	Р	Ж	Е	М	А	А	С	Ф	С	Г	Ь	О	Г	Х	Ж	П	Н
Т	П	И	Ё	Р	Ж	Е	М	А	А	С	Ф	С	Г	Ь	О	Г	Х	Ж	П	Н
С	О	З	Е	П	Ё	Д	Л	Я	Я	Р	У	Н	В	Ы	Н	В	Ф	Ё	О	М
Р	Н		Д	О	Е	Г	К		Ю	П	Т	П	Б		М	Б	У	Е	Н	
П	~~М~~		Г	Н	Д	В	~~Й~~		Э	О	С	О	~~А~~		Л	А	Т	Д	~~М~~	
	~~Л~~		В	М	Г		~~И~~		Ь	Н	Р		~~Я~~		К	Я	С		~~Л~~	
	~~К~~		Б	Л	В		~~З~~		Ы	М	П		~~Ю~~		Й	Ю	Р		~~К~~	
	~~Й~~		А	К	Б		~~Ж~~		Ъ	Л	О		~~Э~~		И	Э	П		~~Й~~	

И		Я	Й	А		Ё		Щ	К	Н		Ь		З	Ь	О		И
З		Ю	Ч	Я		Е		Ш	Й	М		Ы		Ж	Ы	Н		З

Теперь из первых двух столбцов видно, что во втором столбце единственно возможной является буква О. Учтём это наблюдение в 8, 14 и 20 столбцах. Теперь несложно подобрать искомое сообщение:

ПОЗДРАВЛЯЮ С НОВЫМ ГОДОМ

Используемая дата – 31.12.2007.

Решение задачи 4

Для решения этой задачи участникам потребовалось проявить наблюдательность. При рассмотрении рисунка видно, что большинство букв расположено точно в центре клетки, а часть букв – смещена. Если выделить смещённые буквы, как это сделано на рисунке, то можно прочитать фрагмент текста: `авшифреповоротна`. Смещённых букв — как раз 16 – по числу вырезов в трафарете. Поворачивая найденный трафарет в три оставшихся положения, находим остальные три фрагмента:

т	я	с	а	п	м	р	е
в	щ	е	р	е	ш	ш	о
ч	и	ч	н	ф	и	т	р
ё	а	е	т	т	е	т	к
р	а	ь	п	а	п	о	ф
т	в	о	е	з	о	к	р
о	с	а	в	т	р	о	т
л	е	я	н	!	е	т	а

`ярешеткапозволяе`

`тпрочитатьтекст!`

`смещениетрафарет`

Осталось расположить эти фрагменты в «читаемом» порядке.

Ответ: Смещение трафарета в шифре поворотная решетка позволяет прочитать текст!

Решение задачи 5

Так как неизвестно расположение радиоканала, после удаления проводных линий сеть должна разбиться не менее, чем на три фрагмента (компоненты связности). Это легко сделать, удалив все линии связи у двух серверов, расположенных в соседних вершинах куба. Потребуется вывести из строя 5 линий.

Осталось показать, что четырьмя линиями обойтись нельзя. Так как число компонент не меньше трёх, а всего вершин — восемь, то компонента с наименьшим числом вершин содержит одну или две вершины. В первом случае для изолирования одного сервера нужно вывести из строя все три ведущие к нему проводные линии. Легко видеть, что оставшуюся часть сети удалением одной линии разделить на две части невозможно. Во втором случае для изолирования компоненты, состоящей из двух серверов, уже надо удалить четыре проводных линии. При этом, оставшаяся часть сети не распадется на две компоненты.

Решение задачи 6

Несколько участников нашли правильный ответ, просто не побоявшись «в лоб» вычислить указанное число, поделить его на 167 и далее подбирать простые делители по возрастанию.

Решение с меньшим объёмом вычислительной работы выглядит так. Выполним замену $3^4 = x$. Тогда наше число примет вид $x^5 + x + 1$. Разложим его на множители:

$$x^5 + x + 1 = x^5 + x + 1 + x^4 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - x^4 - x^3 - x^2 =$$
$$= x^3(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1 - x^2(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1).$$

Первый множитель $x^2 + x + 1$ также может быть разложен:

$$x^2 + x + 1 = 3^8 + 3^4 + 1 = 3^8 + 2 \cdot 3^4 + 1 - 3^4 = (3^4 + 1)^2 - 3^4 = (3^4 + 3^2 + 1)(3^4 - 3^2 + 1) = 91 \cdot 73 =$$
$$= 7 \cdot 13 \cdot 73.$$

Со вторым множителем дело обстоит чуть сложнее. Постараемся воспользоваться уже имеющейся информацией. Воспользуемся тем, что

$$x^3 - x^2 + 1 = x \cdot (x^2 + x + 1) + x + 3.$$

Заметим, что $x + 3 = 81 + 3 = 84$ делится на 7. Кроме того, мы установили, что на 7 делится число $x^2 + x + 1$, а значит и число $x^3 - x^2 + 1$. Таким образом,

$$x^3 - x^2 + 1 = x \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73 + 84 = 7 \cdot (3^4 \cdot 13 \cdot 73 + 12).$$

Вычисляя далее значение выражения в скобках, и деля его на 167, получаем

$$3^4 \cdot 13 \cdot 73 + 12 = 167 \cdot 449.$$

Ответ: $3^{20} + 3^4 + 1 = 7^2 \cdot 13 \cdot 73 \cdot 167 \cdot 449.$